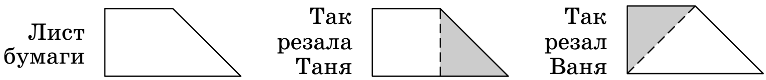
6 класс

Задача 1. Тане и Ване дали одинаковые многоугольники из бумаги. Таня отрезала от своего листа кусок, и остался квадрат. Ваня отрезал точно такой же (и по форме, и по размеру) кусок по-другому, и у него остался треугольник. Нарисуйте пример, как это могло быть. [***4 балла***]

(*Т. В. Казицына*)

Ответ. Один из возможных примеров приведён на рисунках.

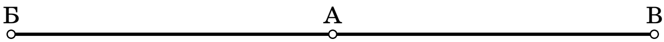


Задача 2. Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки. [***4 балла***]

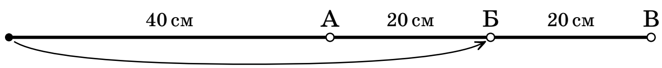
(*А. В. Шаповалов*)

Ответ: 30 см.

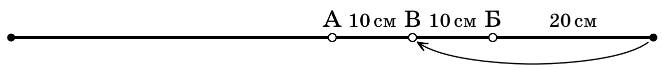
Решение. Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одной прямой, причём первая (А) посередине.



Теперь прыгает вторая лягушка (Б). Она пролетает расстояние до А и ещё половину этого расстояния, что по условию составляет 60 см. Значит, между нею и А (равно как и между А и В) было 40 см.



Итак, теперь между А и В 40 см, ровно посередине между ними находится Б, а очередь прыгать за В. Она пролетит 20 см и ещё половину этого расстояния, то есть всего 30 см.

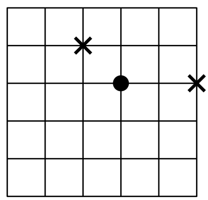


Задача 3. Цифры от 0 до 9 зашифрованы буквами A, B, C, D, E, F, G, H, I, J в каком-то порядке. За один вопрос можно узнать зашифрованную запись суммы нескольких различных букв. Например, если спросить «$A+B=?$», то в случае, когда $A=9$, $B=1$, $C=0$, ответом будет «$A+B=BC$». Как можно за пять таких вопросов определить, какие буквы каким цифрам соответствуют? **[*6 баллов*]**

(*А. А. Заславский*)

Решение. Сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому, назвав все десять букв, мы узнаем, какими буквами зашифрованы цифры 4 и 5. Исключив эти буквы и спросив про сумму остальных восьми, мы узнаем, как зашифрованы цифры 3 и 6. В каждом следующем вопросе так же будем спрашивать про сумму еще не расшифрованных букв. В результате после третьего вопроса узнаем, какими буквами зашифрованы 2 и 7, после четвёртого — 1 и 8 и, наконец, после пятого узнаем, какой из оставшихся букв зашифрована цифра 9, а какой 0.

Задача 4. Лабиринт для мышей (см. рисунок) представляет собой квадрат 5×5 метров, мыши могут бегать только по дорожкам. На двух перекрёстках положили по одинаковому куску сыра (обозначены крестиками). На другом перекрёстке сидит мышка (обозначена кружочком). Она чует, где сыр, но до обоих кусочков ей нужно пробежать одинаковое расстояние. Поэтому она не знает, какой кусочек выбрать, и задумчиво сидит на месте.

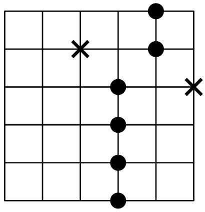


а) Отметьте ещё пять перекрёстков, где могла бы задумчиво сидеть мышка (откуда до обоих кусочков сыра ей нужно пробежать одинаковое расстояние). **[*2 балла*]**

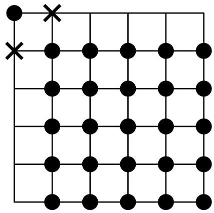
б) Придумайте, на каких двух перекрёстках можно положить по куску сыра так, чтобы подходящих для задумчивой мышки перекрёстков оказалось как можно больше.

[*до 5 баллов*]

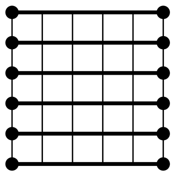
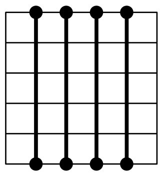
(*Т. В. Казицына*)

Ответ. а) 

б) Максимальное число мест для задумчивых мышек равно 26:



Комментарии. 1. В любом примере для пункта б) один из концов каждого из следующих 10 отрезков должен быть свободен (если отмечены оба конца, то куски сыра должны располагаться на прямой, перпендикулярной этому отрезку, а значит, подходящих мест будет ровно 6).

Отсюда можно вывести и то, что больше 26 задумчивых мышек быть не может: если один из концов свободен, то у нас есть минимум 10 не отмеченных перекрёстков.

2. Сюжет задачи отсылает к известному мысленному эксперименту, наиболее ярко описанному немецким математиком и философом рубежа XVII–XVIII веков Готфридом Вильгельмом Лейбницем: «Голодный осёл, оказавшийся на одинаковом расстоянии от двух совершенно одинаковых охапок сена, умрёт с голоду, так и не выбрав, какую съесть». Этот эксперимент придуман не Лейбницем, он встречается и у других философов, рассуждавших о свободе выбора — у нидерландского философа XVII века Бенедикта Спинозы и даже у древнегреческого учёного Аристотеля в его трактате «О небе», где он иронически приведён в споре с софистами, в качестве примера абсурдного

умозаключения. А самого осла обычно называют буридановым в честь французского философа XIV века Жана Буридана. Выражение «буриданов осёл» вошло в язык как обозначение нерешительного, сомневающегося, колеблющегося человека.

Задача 5. Среди 20 школьников состоялся турнир по теннису. Каждый участник проводил каждый день по одной встрече; в итоге за 19 дней каждый сыграл ровно по одному разу со всеми остальными. Теннисный корт в школе один, поэтому матчи шли по очереди. Сразу после своего первого выигрыша в турнире участник получал фирменную майку. Ничьих в теннисе не бывает. Петя стал одиннадцатым участником, получившим майку, а Вася — пятнадцатым. Петя получил свою майку в одиннадцатый день турнира. А в какой день получил майку Вася?

[*7 баллов*] (*Б. Р. Френкин*)

Ответ. Тоже в одиннадцатый.

Решение. В первый день прошло 10 встреч, и, стало быть, было выдано 10 маек. Одиннадцатая майка была выдана лишь в одиннадцатый день турнира, то есть у Пети и ещё девяти участников в первые десять дней турнира не было ни одной победы. Это возможно только в том случае, когда эти участники (назовем их невезучими) в эти дни не играли друг с другом, то есть каждый из них сыграл с десятью остальными участниками (теми, кому в первый день досталась майка) и всем им проиграл. Но тогда в оставшиеся дни невезучие будут играть между собой. В частности, в одиннадцатый день они разобьются на пять пар, и победители этих пар получат майки с номерами с 11 по 15.

Задача 6. Шеренга солдат-новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, остальные — направо. Оказалось, что в затылок соседу смотрит в шесть раз больше солдат, чем в лицо. Затем по команде «кругом» все развернулись в противоположную сторону. Теперь в затылок соседу стали смотреть в семь раз больше солдат, чем в лицо. Сколько солдат в шеренге? [*8 баллов*] (*А. В. Шаповалов*)

Ответ. 98.

Решение. Будем считать, что сержант построил шеренгу солдат между двумя столбами. После первой команды каждый новобранец смотрит либо в затылок соседу, либо в лицо, кроме двух солдат с краю, которые могут смотреть на столбы.

Если солдат смотрит в затылок соседу, то после разворота этот сосед будет смотреть в затылок ему. Поэтому число смотрящих в затылок не поменяется.

Крайний солдат, смотревший на столб, после разворота не будет этого делать; напротив, если он не смотрел на столб, то после разворота будет. Таким образом, количество смотрящих на столб либо не изменится (был 1 и останется 1), либо увеличится на 2 (было 0, станет 2), либо уменьшится на 2 (было 2, станет 0).

Так как общее число солдат постоянно, число смотрящих в лицо также либо не изменится, либо увеличится или уменьшится на 2.

По условию, число солдат, смотрящих в лицо, сначала составляло шестую часть числа смотрящих в затылок, а потом седьмую часть. Значит, их количество уменьшилось (и, стало быть, уменьшилось на 2). С другой стороны, оно изменилось на $1/6 - 1/7 = 1/42$ от неизменного числа смотревших в затылок. То есть смотревших в затылок было $2 \cdot 42 = 84$ человека, а смотревших в лицо друг другу до разворота было $84 : 6 = 14$. Смотрящих на столбы при этом не было. Таким образом, общее число новобранцев $84 + 14 = 98$.